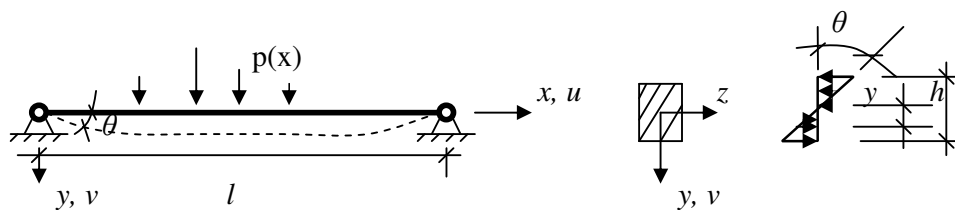


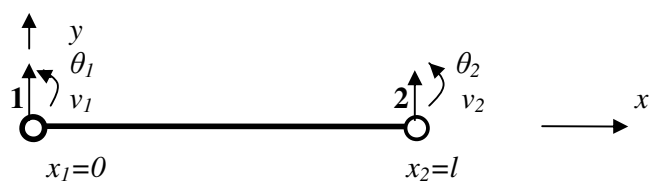
LENKIAMO STRYPO [K] IŠVEDIMAS TAIKANT FORMOS FUNKCIJAS

Lenkiamo strypo teorijos teiginiai:

1. Įlinkiai maži lyginant su skerspjūvio matmenimis
2. Deformuoto strypo ašies polinkių kampai maži
3. Normalė strypo ašiai po deformavimo lieka tiesė ir normalė deformuotai ašiai



Baigtinis elementas ir jo laisvės laipsniai:



Mazginės jėgos:



Mazginiai baigtinio elemento poslinkiai

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Reikalingos lenkiamo strypo teorijos lygtys:

poslinkiai $u(x, y, z) = -y \theta(x)$

pasisukimas apie z ašį $\theta = \frac{dv}{dx}$

deformacijos $\varepsilon = \frac{du}{dx} = -y \frac{d^2v}{dx^2}$

įtempimai $\sigma = E \varepsilon = -y E \frac{d^2v}{dx^2}$

įrašos-momentai

$$M = \iint \sigma y \, dA = - \iint E y^2 \, dA \frac{d^2v}{dx^2} = E I \kappa,$$

$$I = \iint y^2 \, dA,$$

$$\kappa = - \frac{d^2v}{dx^2}$$

– strypo įtemptą – deformuotą būseną apibūdina vien tik įlinkis v .

[K] išvedimas:

1. Užrašomas interpoliacinis polinomas su tiek nežinomų koeficientų, kiek yra laisvės laipsnių elemente, ir gaunamos formos funkcijos:

$$v(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \quad (1)$$

Kraštinės sąlygos:

$$\begin{aligned} v_1 &= c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + c_3 x_1^3 = c_0, & c_0 &= v_1 \\ \theta_1 &= \left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=x_1} = c_1 + 2c_2 x_1 + 3c_3 x_1^2 = c_1, & c_1 &= \theta_1 \\ v_2 &= c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + c_3 x_1^3 = v_1 + \theta_1 l + c_2 l^2 + c_3 l^3 \\ \theta_2 &= \left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=x_2} = \theta_1 + 2c_2 l + 3c_3 l^2 \end{aligned}$$

Iš čia:

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{3}{l^2} v_1 + \frac{3}{l^2} v_2 - \frac{2}{l} \theta_1 - \frac{1}{l} \theta_2 \\ c_3 &= \frac{2}{l^3} v_1 - \frac{2}{l^3} v_2 + \frac{1}{l^2} \theta_1 + \frac{1}{l^2} \theta_2 \end{aligned}$$

Ištačius koeficientų išraiškas į (1):

$$v = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right)v_1 + \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)\theta_1 + \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right)v_2 + \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)\theta_2$$

Kadangi BEMe

$$\begin{aligned} v &= \sum_i N_i v_i, \\ N_1 &= 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, \\ &\dots \\ N_4 &= -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{aligned}$$

2. Deformacijų (Cauchy) lygtys.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -y \sum_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} v_i = \\ &= -y \left\{ \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right)v_1 + \left(-\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2}\right)\theta_1 + \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right)v_2 + \left(-\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2}\right)\theta_2 \right\} \end{aligned}$$

BEM priimta deformacijų išraiška:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\},$$

iš čia

$$[B] = y \left[\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right), \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right), \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right), \left(-\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2}\right) \right]$$

3. Fizinis dėsnis.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = E \varepsilon$$

Jei skaičiuojant standumo matricą ir vėliau vidines jėgas paliksim tokią deformacijų išraišką – įtempimus bus galima skaičiuoti įvairiems skerspjūvio sluoksniams (t.y., prie skirtingų y). Tačiau dažniau skaičiuojami ne įtempimai, bet jų atstojamosios – lenkimo momentai:

$$M = \int \sigma y dA = -EI \frac{d^2 v}{dx^2} = EI \kappa, I = \iint y^2 dA$$

4. Standumo matrica:

$$[K] = \int_v [B]^T [D] [B] dV$$

4x1

1x1

1x4

Pavyzdžiui, pirmasis matricos elementas:

$$\begin{aligned} [K]_{11} &= \int_v y \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) E y \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) dV = \\ &= \int_v y^2 E \left(\frac{36}{l^4} - \frac{144x}{l^5} + \frac{144x^2}{l^6} \right) dV = \\ &= EI \int_0^l \left(\frac{36}{l^4} - \frac{144x}{l^5} + \frac{144x^2}{l^6} \right) dx = \quad \text{– pirmiau integruojame plote, po to – ilgyje} \\ &= EI \left(\left(\frac{36x}{l^4} - \frac{72x^2}{l^5} + \frac{48x^3}{l^6} \right) \right)_0^l = \\ &= EI \frac{12}{l^3} \end{aligned}$$

• • •

Visa matrica:

$$[K] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ sym & & & 4l^2 \end{bmatrix}$$